

Física del botafumeiro

Hace siete siglos se instaló un mecanismo destinado al culto en la catedral de Santiago de Compostela, que introduce efectos dinámicos refinados. Pudo haber originado las primeras experiencias sobre caos determinista.

Juan R. Sanmartín Losada

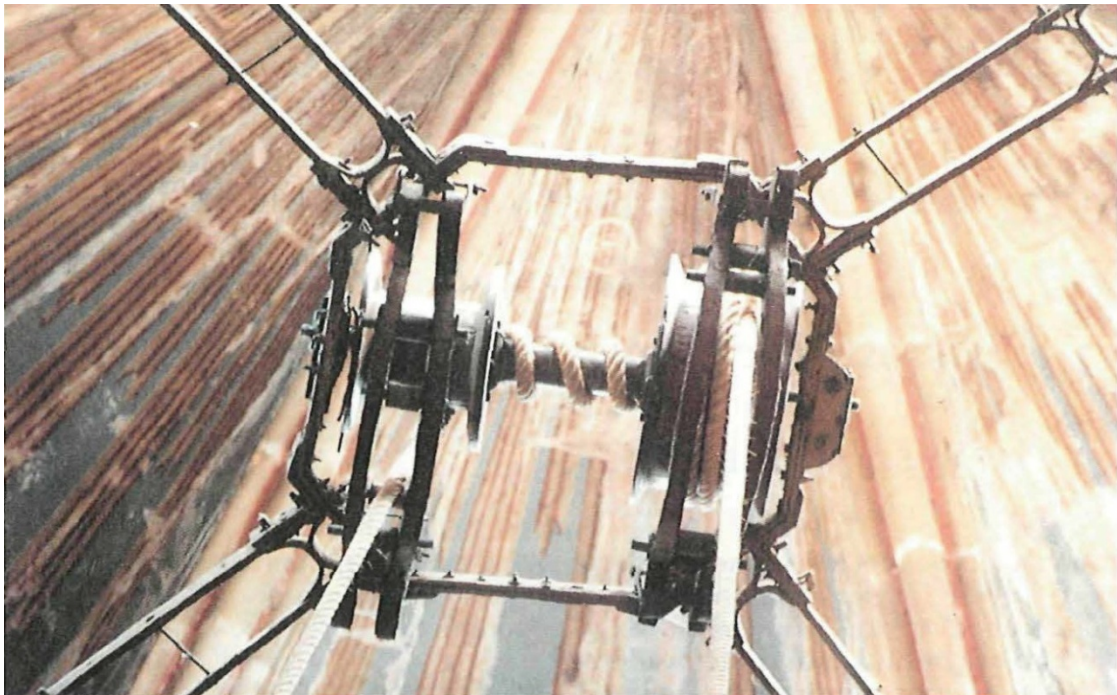
El 11 de diciembre de 1494, un viajero alemán, el médico Jeronymus Munzer, pernoctó en Redondela. Aunque alojado en casa de un compatriota de Frankfurt, Munzer, reportero a su manera, no menciona en su crónica latina la carabela atracada en la vecindad el año anterior con noticia de gentes miles de millas mar adentro. Sí alude, por dos veces, a un rito celebrado en Compostela, santuario de Santiago el Mayor durante siete siglos y adonde llegó el 13 de diciembre. Quinientos años más tarde, y en ciertos servicios litúrgicos, el viajero aún puede asistir a esta singular celebración.

De una estructura en lo alto del crucero de la catedral se cuelga por una cuerda el botafumeiro, un incensario gigante al que se desvía, de un empujón, de la vertical. Mientras se balancea como un péndulo, ocho hombres en el suelo, al otro extremo, sueltan cuerda en el punto más alto del movimiento y tiran de ella en el más bajo. Paso a paso, cíclicamente, los tiradores amplifican así la oscilación del incensario, hasta llevarlo a 21 metros, en lo alto de la bóveda, en un arco de 65 metros a lo largo del transepto, a 68 kilómetros por hora en un punto a ras de suelo. Los elementos mecánicos implicados en el rito son muy simples y se han conservado registros de ciertas mejoras introducidas tras los comienzos, en el siglo XIII. La estructura de soporte actual es un armazón de hierro atornillado a cuatro sustentáculos que arrancan de los grandes pilares del crucero; según actas del cabildo catedralicio de 1602, la estructura se montó ese mismo año, tras considerar que la anterior, un sistema de vigas a través del crucero, al nivel de las bóvedas, obstruía excesivamente la luz que bajaba de las vidrieras del cimborrio. La cuerda está devanada en dos tambores de madera de castaño, de 58 y 29 centímetros de diámetro, con el eje común apoyado en el armazón sobre simples cojinetes de deslizamiento. Para reemplazar la cuerda, como en 1975 o hace cuatro años, se extiende una escalera de mano desde una estrecha balconada que ciñe el interior del cimborrio; se accede a aquélla por una vidriera, caminando sobre la techumbre de piedra desde una torre en la fachada occidental.

El botafumeiro actual es de latón plateado y pesa unos 53 kilogramos; un artículo de 1852, del *Semanario Pintoresco Español*, señala que sustituyó a uno de hierro el año anterior. Hay una primitiva referencia a un botafumeiro de plata en una nota de principios del siglo XIV y una última en un libro impreso en 1615, pero los registros del Archivo de la Catedral sugieren que ya se usaba uno de hierro en 1812, cuando lo reparó un "calderero", y en 1729, cuando fue "estañado". Con un cuenco lleno de brasas e incienso en su interior, y tres metros de cuerda en un nudo en lo alto, el incensario actual es un cuerpo semirrígido de más de 56 kilogramos de peso. En su posición más baja, el centro de gravedad pasa 1,2 metros sobre el suelo y 20,6 metros por debajo del eje de los tambores.

La secuencia mecánica es sencilla. El tambor grande está del lado opuesto a los tiradores, de modo que el conjunto funciona a la inversa de un torno: multiplica desplazamientos, no fuerzas. Cada vez que el botafumeiro se aproxima a la vertical, los hombres dan un tirón y desenrollan casi metro y medio de cuerda del tambor pequeño; el eje gira más de vuelta y media y alza el incensario 2,9 metros. Para completar el ciclo los tiradores sueltan igual longitud de cuerda en el punto más alto de la oscilación. Se podría usar dos cuerdas (no hay deslizamiento sobre los tambores), pero es más fácil sujetar una pasándola de uno a otro por agujeros en el resalte de carrete en sus extremos. Tras el empujón inicial, la amplitud de oscilación es de unos 13 grados. Requiere alrededor de 80 segundos y 17 ciclos (semiperíodos de oscilación del incensario) alcanzar una amplitud máxima de 82 grados, medio metro por debajo de la bóveda.

Si la distancia del botafumeiro a la estructura soporte no variase, aquél se movería como un péndulo, y la tensión en la cuerda no realizaría trabajo mecánico. En un péndulo ideal (una partícula que colgara de una cuerda de masa nula, sin pérdidas energéticas), la energía total, suma de la cinética o del movimiento y la gravitatoria, se mantiene constante al pasar el tiempo. La constante viene dada por el valor de la energía gravitatoria en el punto superior de la oscilación, donde la cinética es nula; es decir, el valor constante de la energía total viene dado por el producto del peso por la altura máxima sobre el punto inferior.





ESTRUCTURA SOPORTE DEL BOTAFUMEIRO, un marco de hierro atornillado a cuatro sustentáculos, también de hierro, empotrados en los pilares del crucero; el conjunto trabaja como un arco. Instalada en 1602, fue reforzada recientemente con tirantes para abortar un fallo incipiente en los encastrés. Los tambores coaxiales tienen diámetros de 29 y 58 centímetros; el pequeño, en el lado de los tiradores. Para alzar el incensario 2,9 metros, los tiradores han de desenrollar cuerda en la mitad de ese valor. Las tensiones en uno y otro lado están en razón inversa de los diámetros respectivos.

Para caracterizar la energía podemos usar, en vez de esta altura, la amplitud de la oscilación, o la velocidad máxima, dada por la fórmula de caída libre; fórmula según la cual el cuadrado de la máxima velocidad es igual al doble de la aceleración de la gravedad por la altura máxima.

En el caso del botafumeiro, para el que velocidades y recorridos son grandes, las pérdidas de energía mecánica por resistencia del aire tienen un efecto apreciable. La determinación teórica de resistencias es imposible en la práctica, excepto para condiciones y formas de cuerpo especiales, lo que no se da en el botafumeiro. Este es, sin embargo, un problema estándar en aerodinámica experimental. La resistencia a un cuerpo en movimiento de traslación uniforme a través del aire se determina cómoda e indirectamente en un túnel de viento, donde una corriente de aire pasa en torno a un modelo del cuerpo, a escala conveniente y en reposo.

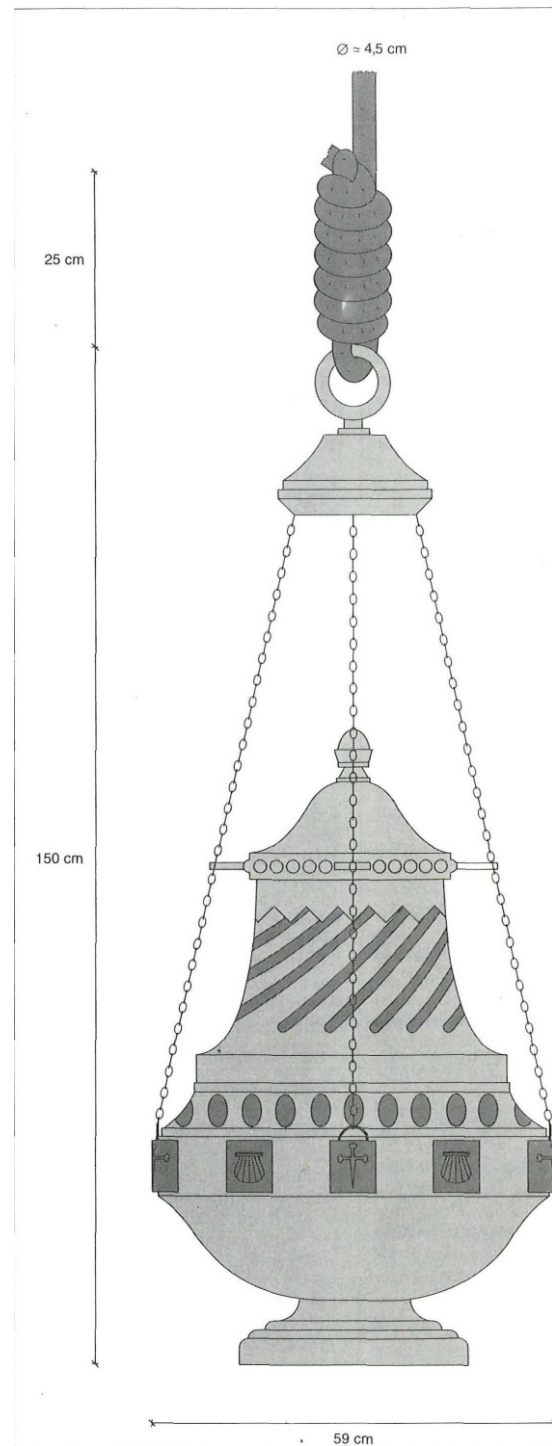
De las medidas se obtiene el coeficiente de resistencia, definido como el valor de ésta dividido por el semiproducto de la densidad del aire, el cuadrado de la velocidad y un área frontal característica. Por tratarse de un cociente de dos fuerzas, constituye una cantidad adimensional (su valor no se altera si se eligen nuevas unidades de medida), razón por la cual sólo puede depender de los parámetros adimensionales que caracterizan el movimiento. Si se desprecia la compresibilidad del aire, lo que es permisible a velocidades pequeñas comparadas con la del sonido, esos parámetros son todos los que fijan la forma del cuerpo y su orientación respecto a la corriente, junto con un indicador de efectos de viscosidad llamado número de Reynolds; esta última magnitud expresa la razón del producto de la velocidad relativa por el tamaño característico, a la viscosidad cinemática del aire. En consecuencia, cuerpo y modelo, cuando se hallen igualmente orientados, poseerán el mismo coeficiente a velocidades que estén en proporción inversa a los tamaños; en esas condiciones, la resistencia, que es proporcional al área frontal por el cuadrado de la velocidad, será también igual para ambos.

En el caso del incensario, las velocidades de interés para la resistencia van desde la máxima alcanzada en el movimiento, 19 metros por segundo, a un valor, digamos, diez veces menor: a velocidades inferiores, la resistencia es demasiado pequeña para contribuir sensiblemente a la pérdida de energía (o para permitir mediciones precisas en el túnel). Las medidas se realizaron con un modelo comercial del incensario a escala 1/4,5 con el eje perpendicular al viento. A la máxima velocidad de interés para el modelo, $4,5 \times 19$ metros por segundo ($1/4$ de la velocidad del sonido), los efectos de compresibilidad apenas son apreciables; es claro que tales efectos harían inútil un modelo sensiblemente menor. Se midió la fuerza del aire en la dirección opuesta al movimiento (resistencia) y en la dirección perpendicular a lo largo del eje (sustentación); esta última, que no sobrepasa el 1 por ciento de la fuerza centrífuga, solamente afecta, y de forma mínima, a la tensión de la cuerda.

¿Podemos usar valores de resistencia correspondientes al movimiento de traslación uniforme para la trayectoria real del botafumeiro? El movimiento de éste difiere poco de una rotación en torno al eje de los tambores, de modo que la velocidad de un punto del botafumeiro es proporcional a su distancia al eje. Las distancias características caen en el intervalo, digamos, $20,6 \pm 0,4$ metros. Asociar su movimiento al de traslación representa, pues, un error del 2 por ciento. Suponerlo uniforme tiene una validez y un fundamento semejantes: la cuerda es muy larga.

La cuerda misma sufre una resistencia, pero no fue preciso medirla. La parquedad de la razón de diámetro a longitud nos faculta para considerar segmentos de cuerda como partes de un cilindro de longitud infinita en traslación uniforme a la velocidad local. El coeficiente de resistencia de un cilindro infinito -definido como el valor de la siguiente expresión: (resistencia por unidad de longitud) $1/2 \times (\text{densidad del aire}) \times (\text{velocidad local})^2 \times (\text{diámetro})$ es una función bien conocida del número de Reynolds, que cifra, recuérdese, la razón del producto de la velocidad y el diámetro a la viscosidad cinemática del aire.

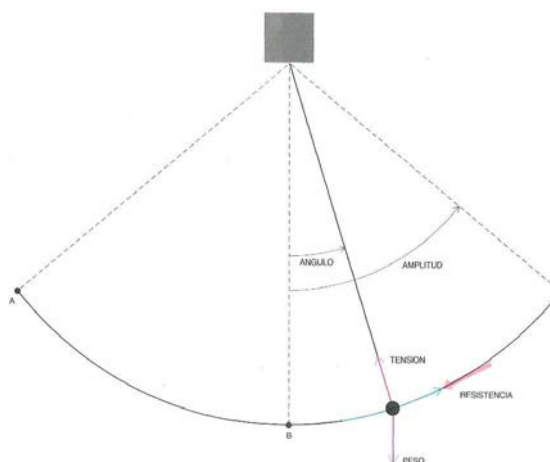
Conocidos los coeficientes de resistencia, es posible calcular la pérdida de energía en un ciclo, entre dos puntos de altura máxima. Si la pérdida relativa es pequeña, podemos despreciarla en el cálculo y suponer que la energía es constante en el ciclo. De ello se infiere que la pérdida relativa por ciclo, debida a la cuerda o al mismo incensario, es proporcional al cociente entre el peso del aire barrido por uno otro y el peso del incensario. La pérdida total de energía es la suma de las dos parciales.



3. BOTAFUMEIRO utilizado en la actualidad, fabricado en 1851 en latón plateado; todavía en 1615 se usaba uno de plata; uno de hierro, al menos desde 1729. El actual pesa más de 53 kilogramos y su centro de gravedad, a 55 centímetros de la base, cuelga 20,6 metros por debajo 0*1 eje soporte y 1,2 metros sobre el suelo. Una cuerda de 4,7 centímetros de grosor remplazó hace cuatro años a la mostrada en la ilustración.

Se puede incrementar la energía de la oscilación variando la longitud de cuerda que cuelga hasta el incensario (su radio de giro). La acción de variar un parámetro de un oscilador se llama bombeo; la amplificación del movimiento del incensario constituye, en efecto, un ejemplo de amplificación paramétrica por bombeo, como el columpio familiar en el que un niño se agacha y levanta cíclicamente. Cuando la longitud de cuerda varía, la tensión realiza trabajo. El trabajo es positivo (e incrementa la energía) en una etapa que acorta la cuerda, y negativo en el caso opuesto. Para un ciclo completo, que implica alargamiento y acortamiento, la ganancia por bombeo, esto es, el trabajo neto de la tensión puede adquirir uno u otro signo.

La aceleración radial durante una etapa de bombeo resulta del desequilibrio de las fuerzas (tensión, fuerza centrífuga y parte del peso) que actúan a lo largo de la cuerda. No hay movimiento radial antes o después del bombeo, por lo que el trabajo de la tensión en toda la etapa es igual y opuesto al trabajo combinado de las otras dos fuerzas. Esto permite determinar fácilmente la secuencia de movimientos (óptima) que produce una ganancia máxima por ciclo, dado un pequeño desplazamiento radial del incensario en una y otra etapa. Como en el caso de pequeñas pérdidas por resistencia del aire, se pueden calcular los efectos del bombeo suponiendo que la energía es constante en el ciclo. Resulta claro, entonces, que el acortamiento de la cuerda se ha de realizar instantáneamente, en el punto inferior de la oscilación, cuando todo el peso tira de la cuerda y es máxima la fuerza centrífuga, que está dada por el cociente entre energía cinética y semilongitud de cuerda. Y se ha de soltar ésta, hasta llevarla a su longitud nominal, en el punto superior, donde la acción del peso es mínima y, la fuerza centrífuga, nula.

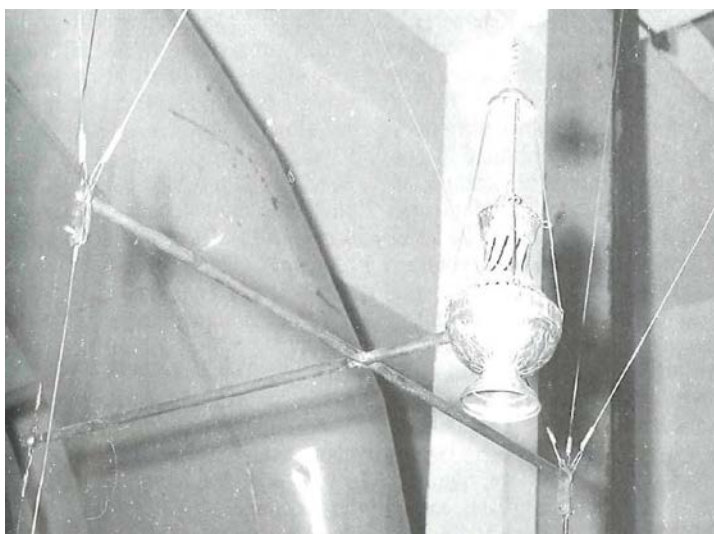


PÉNDULO SIMPLE. Tensión y peso tratan de llevarlo a su posición normal de equilibrio (punto B). Como la velocidad crece al aproximarse a este punto, el péndulo lo sobrepasa y oscila en vaivén entre A y C, intercambiando energías cinética y gravitatoria. La energía total permanece constante: la tensión, perpendicular al desplazamiento, no realiza trabajo mecánico. En un péndulo real, grande, la resistencia del aire es la causa dominante de pérdidas energéticas. Si no se tiene en cuenta el giro de la cuerda, hay que incluir una "fuerza" de inercia, centrífuga (no dibujada).

Se obtiene así la ganancia óptima por bombeo. El valor de la ganancia relativa por ciclo es igual al triple del acortamiento de la cuerda dividido por la longitud nominal. Nótese que la ganancia relativa no crece con la amplitud, como ocurriría en el caso de las pérdidas, de modo que la resistencia del aire, despreciable a baja amplitud, puede finalmente dominar al bombeo. La ganancia absoluta es pequeña a baja amplitud; como ha observado el sacristán mayor de la catedral, quien dirige el equipo de tiradores, la amplificación de las oscilaciones requiere un tiempo desusadamente largo si el empujón inicial es débil.

El movimiento real del incensario difiere poco del óptimo. Repetidas observaciones verifican que sí se bombea en torno a los puntos inferior y superior de la oscilación. La acción es, además, razonablemente instantánea, esto es, breve comparada con la duración del ciclo; la razón principal estriba en que el acortamiento relativo (2,9 metros / 20,6 metros) es pequeño y en que la aceleración de la gravedad determina el movimiento pendular y las etapas de bombeo. El período de un péndulo de 20,6 metros va de 9,1 segundos, a 13 grados, a 10,5 segundos, a 82 grados; un ciclo dura así alrededor de 5 segundos.

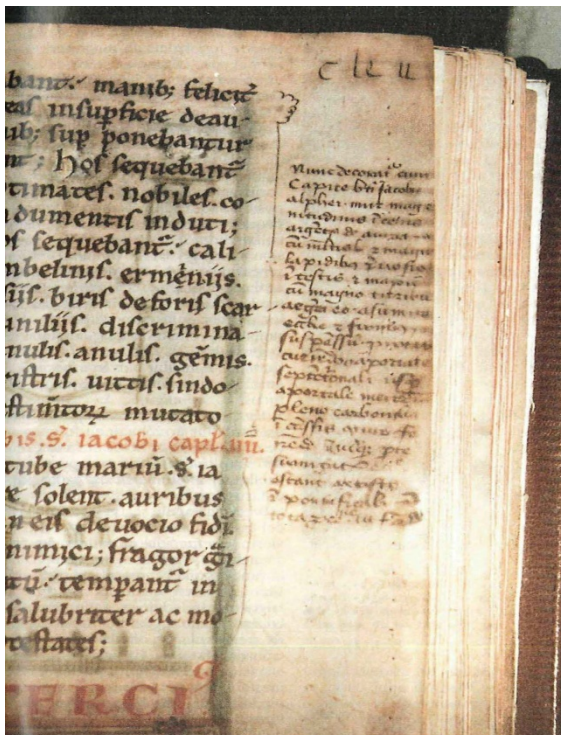
La caída libre del incensario desde el punto superior, cuando los tiradores sueltan cuerda y la tensión se relaja en el extremo opuesto, dura tan sólo 0,77 segundos a baja amplitud. En la etapa del punto interior, los tiradores, que actúan oblicuamente sobre bramantes atados a la cuerda, dan un tirón de hasta unos $3/4$ de su peso combinado; a ello sigue una fase, relajada la tensión, en la que el peso termina anulando el movimiento radial del incensario. Si se desprecia la inercia de cuerda y tambores (que son huecos) y el par de fricción sobre su delgado eje, las tensiones a uno y otro lado de aquélla están en razón inversa a los radios de los tambores respectivos; el tirón en el lado del botafumeiro resulta ser de unas cuatro veces su peso. A grandes amplitudes, la duración de la etapa es de 0,75 segundos.



MODELO DEL INCENSARIO EN UN TÚNEL DE VIENTO. El modelo está fijado por riostras y alambres a balanzas para medir las fuerzas y momentos que sobre él ejerce el aire, y lleva un nudo simulado en lo alto y varillas en lugar de cadenas. Se halló una resistencia de 0,15 y 3,4 kilogramos a 3,1 y 13,0 metros por segundo, respectivamente. La fuerza perpendicular al movimiento (sustentación) es de un 10 a un 15 por ciento de la resistencia. Como el incensario presenta casi completa simetría de revolución, solamente fue necesario medir el momento de balanceo; las medidas muestran que la fuerza neta del aire actúa sobre el eje del incensario a unos 10 centímetros por debajo del centro de gravedad. Los números de Reynolds de interés caen dentro del intervalo 105-106.

El descubrimiento del procedimiento óptimo para bombear el incensario constituye un hecho notable, lo que no puede decirse del columpio. Niños de todas las épocas aprendieron a columpiarse lo mismo que ahora aprenden a montar en bicicleta: la percepción y el control inconscientes del propio movimiento forman parte esencial del proceso. Nunca hubo necesidad de una regla para bombear un columpio, y, por lo que se sabe, ésta no se hizo explícita hasta tiempos modernos. En el caso del botafumeiro, sin embargo, no está involucrada la percepción del propio cuerpo y, puesto que actúa un equipo cuyo director da órdenes en ciertos momentos, se impone establecer una regla.

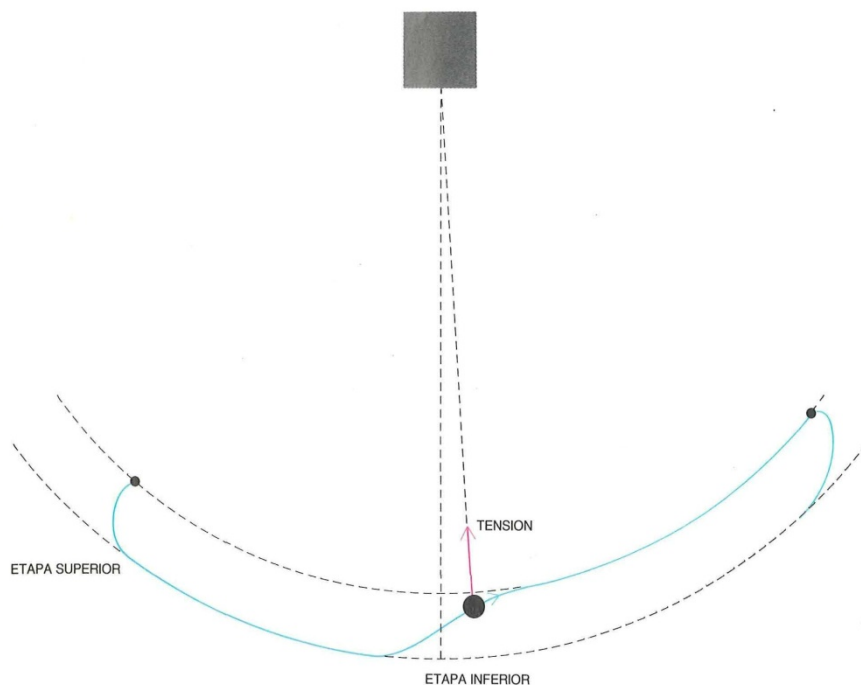
La regla fue descubierta unos 400 años antes de que Galileo y Huyghens analizaran el péndulo. El libro III de un código latino del siglo XII, el Liber Sancti Jacobi, describe una procesión en el interior de la catedral, en cierta ceremonia litúrgica. La carrera del botafumeiro es, en la actualidad, parte de esa ceremonia, pero no lo era en el siglo XII: el código no menciona el incensario, aun cuando, al detallar la novísima catedral en el libro V, hace referencia a una lámpara aromática gigante colgada entonces en el crucero. Pero una nota en latín del primer cuarto del siglo XIV, en el margen del folio CLXII sobre la ceremonia, describe la carrera del incensario y declara que "es ahora" parte del acto litúrgico. Parece así razonable afirmar que la regla se descubrió en algún momento del siglo XIII. Conviene señalar, como contraste o curiosidad, que en el Liber Pontificalis, una historia medieval del papado, se menciona un incensario de oro gigante, colgado en el crucero de la primitiva basílica de San Pedro en tiempos de Sergio I, a finales del siglo VII ; no existe noticia alguna de que fuese puesto nunca en movimiento.



FOLIO CLXII del *Liber Sancti Jacobi*, un código regalado a la catedral de Santiago de Compostela a mediados del siglo XII y guardado en el archivo de la seo, donde se lee el texto más antiguo sobre el botafumeiro. El folio corresponde al final del capítulo III del libro III y describe una procesión ceremonial en el recinto catedralicio sin mencionar el incensario. Una nota al margen, añadida menos de 200 años después, describe la carrera de aquél, "ya" parte de la ceremonia: "nunc decoratur...maxime cum magno *turibulo* argenteo, a sumitate ecclesiae et funibus suspensum per rotas currendo a portale septentrionali usque a portale meridiano, pleno carbonibus incensus cum ture feriendo in utraque parte sumitatis ecclesiae..." ["Ahora se engalana... con un gran incensario de plata, que discurre, suspendido en la parte superior del templo por cuerdas, desde el portal norte al sur, lleno de carbones encendidos y portando incienso a un lado y otro de la parte superior de la basílica.

El descubrimiento de la regla no pudo ser fácil. Para una secuencia de bombeo arbitraria, la ganancia puede ser tanto negativa como positiva; y la ganancia neta, restadas las pérdidas por resistencia del aire, es muy probablemente negativa, excepto a bajas amplitudes. Según el sacristán mayor, su equipo probó en ocasiones a dar el tirón con clara anterioridad al paso del incensario por la vertical; no funcionó. Mas, una vez descubierta la secuencia óptima, se dispuso de un saber técnico: la secuencia era conocida por un círculo de expertos (los tiradores) y podía ser cuidadosamente transmitida por lenta y repetida renovación de sus miembros. El actual sacristán se unió al equipo en 1950 y pasó a encabezarlo en 1964.

Es claro, por otra parte, que hubo de existir un temprano conocimiento no sólo de la regla de bombeo, sino también de la influencia de ciertos elementos mecánicos sobre la ganancia neta por ciclo. Por ejemplo, las pérdidas (pero no la ganancia) relativas varían en proporción inversa al peso del incensario, esto es, la ganancia neta es tanto mayor cuanto menor sea el peso. Resultaría así imposible llevar hasta la bóveda el movimiento de un incensario demasiado ligero. El equipo de tiradores ha verificado recientemente esta aparente paradoja; probaron a bombear un ligero ornamento de plata que cuelga usualmente en el lugar del incensario y fracasaron.



CICLO ÓPTIMO para variación relativa del radio pequeña. Al acortar la longitud del péndulo, la tensión realiza trabajo positivo (con aumento de la energía de oscilación) contra las fuerzas centrífuga y del peso. Si la variación radial es pequeña (bombeo débil), la fuerza centrífuga toma valores próximos a los propios en ausencia de bombeo. El ciclo óptimo incluye una etapa de acortamiento instantánea en el punto inferior de la oscilación, donde el peso actúa radialmente y la fuerza centrífuga es máxima, así como una etapa de alargamiento en el superior, donde se da lo opuesto.

De modo semejante, la ganancia neta es tanto menor cuanto menor sea el acortamiento de la cuerda en el punto inferior de la oscilación. Un solo tambor resultaría así insuficiente. Sin mecanismo multiplicador, el desplazamiento radial del botafumeiro sería de metro y medio, la misma longitud de cuerda que los tiradores desplazan en su lado, la máxima que un bombeo confortable permite; la amplitud límite alcanzable sería de 55 grados, muy por debajo de la bóveda. Posiblemente, se usó un solo tambor en los primeros ensayos, pero pronto hubo de percibirse la necesidad de incrementar el desplazamiento radial en el bombeo, mediante tambores coaxiales de diferentes diámetros: la nota marginal en el código señala que el incensario llegaba a la bóveda.

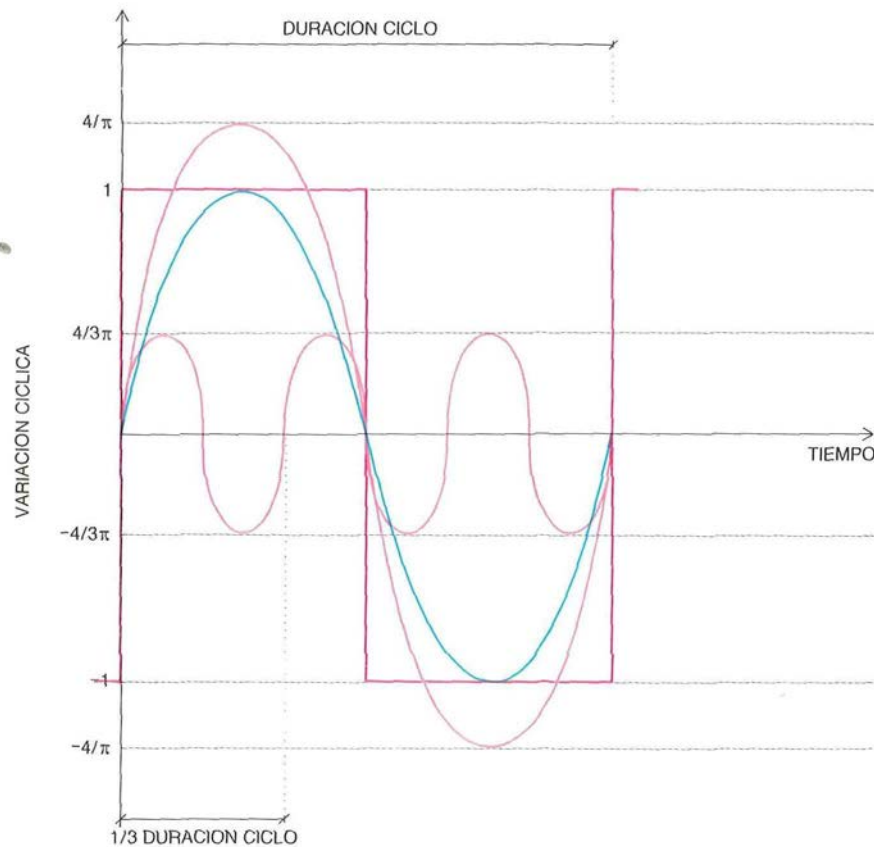
La existencia de un saber técnico sobre mecanismos y procedimiento queda corroborada en la propia difusión del rito. La tradición mantiene que las catedrales góticas de Orense y Tuy, a 100 kilómetros una de otra y de Compostela, tuvieron botafumeiros propios en el pasado. No queda traza de ellos, pero las Actas del Cabildo de Orense del año 1503 prueban que un incensario gigante recorría el transepto de su catedral en ocasiones especiales. La peregrinación a Santiago de Compostela no decayó hasta el siglo xvi; ¿por qué, entonces, no tuvo el rito mayor difusión? La respuesta podría residir en la arquitectura de las iglesias: al tiempo de su nacimiento, prevalecía ya el gótico sobre el románico. Las catedrales de Orense y Tuy tienen bóvedas de altura modesta, comparables con la seo de Santiago, por lo que no pudo ofrecer dificultades trasladar la técnica. Pero las bóvedas góticas típicas son casi dos veces más altas. Las dificultades de hacer correr un botafumeiro de doble longitud pendular pudieron parecer insuperables. El aumento sustancial de pérdidas por resistencia del aire lleva a aumentos sustanciales en la masa del incensario y en el grosor y el desplazamiento radial de la cuerda; y aun cuando esto se hubiera comprendido en la época, hubiese implicado estructuras de soporte excesivamente pesadas, muchos tiradores y mecanismos multiplicadores complejos.

El momento que ejerce el peso de un péndulo sobre su eje soporte se anula en el instante del paso por la vertical. De acuerdo con ello suele determinarse y explicarse la ganancia en la etapa inferior del bombeo de un columpio. Sin embargo, para considerar instantánea la etapa, resulta necesaria una aceleración radial de bombeo mucho mayor, en promedio, que la gravitatoria. Esto no se cumple en columpios que cuelgan de cuerdas, por la misma razón que en el caso del botafumeiro: la cuerda nunca ejerce sobre éste una fuerza hacia abajo, lo que supondría tensión negativa, y la gravedad interviene siempre en el frenado vertical. Aunque el argumento no es válido para columpios de barras rígidas, la conclusión es la misma en la práctica, porque la fuerza que el niño pone en juego no excede, en orden de magnitud, a su propio peso. Como ya se observó, en un columpio típico las etapas de bombeo cubren una fracción apreciable del ciclo.

La realización de trabajo neto, con una variación radial neta nula, se funda en la posible diferencia de tensiones en las dos etapas de un ciclo. La verificación y la optimización de esa posibilidad resultó fácil en el caso de pequeño acortamiento relativo: bastó con atender a la evolución de la tensión a lo largo del movimiento, en ausencia de bombeo. Ganancia y ciclo óptimos adquieren entonces un carácter universal e independiente del valor del cociente

entre la aceleración radial en promedio y la aceleración de la gravedad. No obstante, el ciclo óptimo puede recibir otra interpretación en el caso particular de bajas amplitudes.

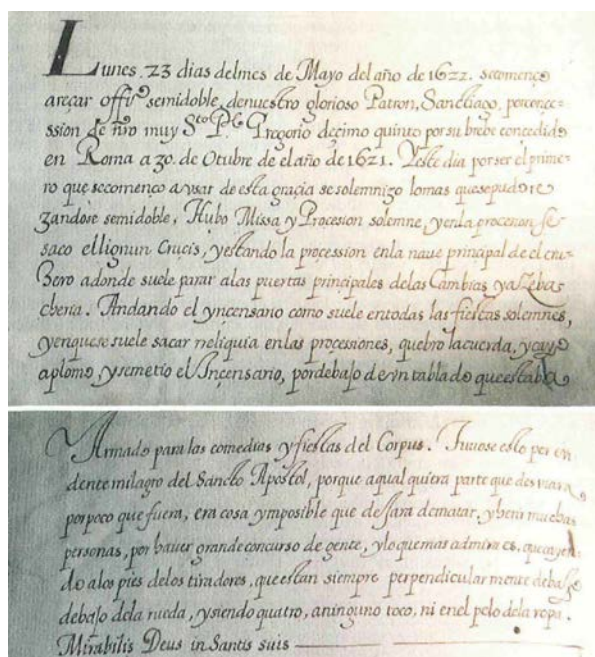
En estas condiciones, el péndulo es un oscilador armónico: su frecuencia de oscilación ω es la misma a diferentes amplitudes, siempre pequeñas. Cualquier modulación del radio pendular, o secuencia de bombeo repetida cíclicamente cada semiperíodo del movimiento del péndulo, se convierte en función periódica de frecuencia 2ω . Tenemos un ejemplo en la función que representa el ciclo óptimo; otro, en la función seno de la trigonometría. Un oscilador armónico, modulado según una función seno de frecuencia Ω , obedece a la ecuación de Mathieu. Es sabido que esta ecuación exhibe una resonancia e inestabilidad paramétrica (energía del oscilador creciente) para ciertos valores de Ω . En el caso de modulación débil solamente hay crecimiento apreciable si Ω dobla la frecuencia de oscilación ω . Para esta modulación de tipo seno con frecuencia 2ω , el incremento relativo de energía del oscilador armónico resulta ser $\pi/4$ veces menor que el ya hallado para modulación óptima.



ESQUEMA DEL CICLO DE BOMBEO ÓPTIMO, supuesto débil, a bajas amplitudes. En este caso, la duración de un ciclo (un semiperíodo pendular) es independiente de la amplitud, y cualquier bombeo cíclico es un proceso periódico. La figura nos muestra la variación relativa, normalizada, del radio del péndulo para el ciclo óptimo (línea roja continua, función escalón) y las componentes sinusoidales primera (frecuencia igual a la del ciclo) y tercera (frecuencia tres veces la del ciclo) de su suma de Fourier (líneas rojas discontinuas; no hay componentes pares). De las funciones periódicas de período y magnitud dados, la función escalón es la de máxima primera componente: $4/\pi$ veces la función seno (línea azul). A bajas amplitudes, la ecuación de un péndulo débilmente bombeado (ecuación de Mathieu) muestra que sólo la primera componente de Fourier determina la amplificación.

Ahora bien, para una secuencia de bombeo arbitraria, la técnica del análisis de Fourier permite escribir la modulación, de frecuencia 2ω , como una suma de funciones seno de frecuencias 2ω , 4ω , 6ω , etcétera, por coeficientes de Fourier apropiados. Si la modulación es débil, sólo el término de frecuencia 2ω contribuirá al crecimiento o ganancia de energía. Dedúcese de ello que el problema de determinar la secuencia óptima para una pequeña variación radial dada equivale al de encontrar, entre todas las funciones periódicas de frecuencia y valores máximo y mínimo dados, aquella para la cual es mayor el primer coeficiente de Fourier. La solución a este último problema es la función que salta discontinuamente ("instantáneamente") entre los valores máximo y mínimo, el ya conocido ciclo óptimo. ¡Su primer coeficiente es $4/\pi$ veces el valor del salto!

¿Es segura la carrera del botafumeiro? El momento más peligroso para un accidente ocurre en lo más alto de los primeros ciclos. Al frenar al incensario de casi 60 kilogramos que cae desde ese punto, la cuerda sufre un tirón que es máximo a baja amplitud, cuando la oscilación es casi horizontal. La energía cinética de la caída libre, unos tres metros, se transforma en su mayor parte en energía elástica, que es proporcional a la tensión máxima y al muy pequeño alargamiento de la cuerda. Porcentualmente, el alargamiento viene dado por el cociente entre esfuerzo (tensión por unidad de área de la sección transversal de la cuerda) y una cantidad característica de su material llamada módulo de Young. Para determinado material y longitud, así como cierta energía de caída, resulta un esfuerzo inversamente proporcional al diámetro de la sección. Las tres últimas cuerdas en uso han sido de yute, pero en el pasado se empleó el cáñamo. Un esfuerzo de 800 kilogramos por centímetro cuadrado es típico de la rotura, aunque puede haber deformación permanente a la mitad de ese valor. Con un módulo de Young estimado en unos 150.000 kilogramos por centímetro cuadrado, se alcanzan los 400 kilogramos por centímetro cuadrado, en el lado de los tiradores, para un diámetro de 3 centímetros. Se utilizó una cuerda de 4,5 desde 1975 hasta hace unos cuatro años, anteriormente una de 4, y en la actualidad de 4,7. Sin embargo, en una fotografía del primer tercio de siglo se aprecia un grosor de 3,2 centímetros, y un asiento en el Libro de Fábrica de 1673 sugiere un diámetro aún menor. Los tiradores no dejan que la caída sea enteramente libre; de otro modo, el tirón podría alzar su centro de gravedad hasta 10 centímetros.



CAÍDA DEL BOTAFUMEIRO desde lo alto de uno de los primeros ciclos. Este registro se encuentra en el último folio de una copia manuscrita, fechada en 1587, de un código de la primera mitad del siglo XII, *Historia Compostelana*, crónica del turbulento Santiago de la época: "...Andando el incensario como suele en todas las fiestas solemnes... quebró la cuerda, y cayó a plomo... cayendo a los pies de los tiradores, que están siempre perpendicularmente debajo... de la rueda...".

Resulta fácil imaginarse un accidente de este tipo. El botafumeiro cae verticalmente, cerca del centro del crucero. Así ocurrió el 23 de mayo de 1622, cuando, rota la cuerda, el botafumeiro se precipitó a plomo al lado de los tiradores, que actúan casi debajo de la estructura soporte. Se sabe, además, de una segunda caída: el 25 de julio de 1499 se soltó el incensario y, como un proyectil, recorrió el transepto, en cuya puerta se aplastó.

Existe una segunda razón para los accidentes, y es posible probar que la caída de 1499 corresponde a este tipo. En ausencia de bombeo, la tensión alcanza su máximo en lo más bajo de las oscilaciones de mayor amplitud, y naturalmente se intensifica con el bombeo. La rotura de la cuerda, sin embargo, es aquí improbable. Como se estimó con anterioridad, el tirón en esa etapa alcanza sólo los $3/4$ del peso combinado de los tiradores, no más allá de media tonelada; el esfuerzo sobre una cuerda de tres centímetros de grosor no excede de 70 kilogramos por centímetro cuadrado. Es cierto que, frecuentemente, y debido al impulso hacia arriba que el tirón imprime al incensario, éste asciende más allá de los 2,9 metros, y en la breve caída libre posterior la cuerda sufre un nuevo tirón, de frenado; pero en todo caso éste es mucho menor que el de la etapa del punto superior. En el accidente de 1499, fueron las cadenas de las que pende el cuerpo principal del botafumeiro las que se rompieron. Es improbable que trabajen a un tiempo más de tres cadenas; si una de ellas falla, la tensión en las otras crece en un 50 por ciento.

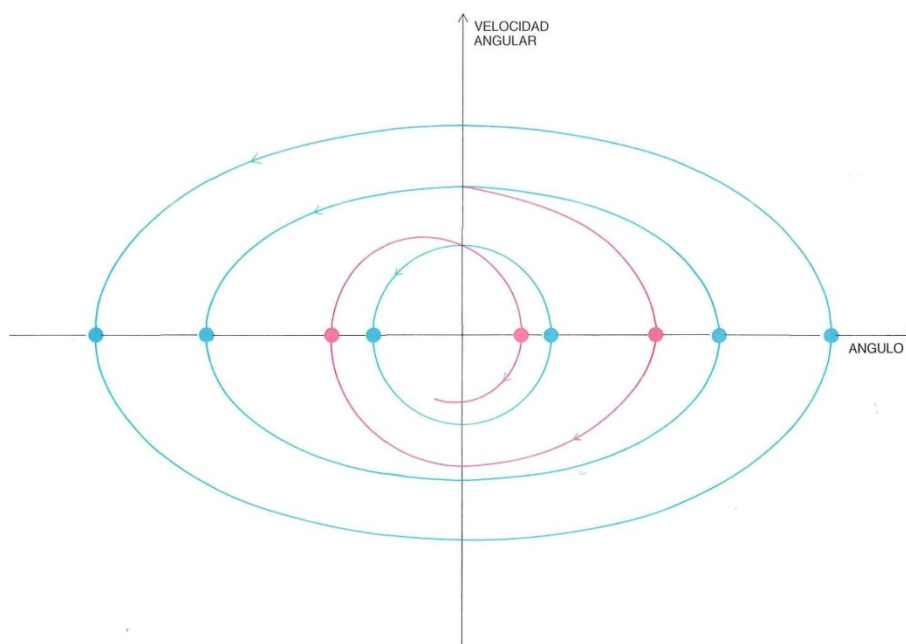
Una vez libre, el incensario se moverá como un proyectil. La posición, celeridad y dirección iniciales de ese proyectil, y en consecuencia su alcance sobre el suelo, dependen del ángulo entre cuerda y vertical en el instante en que queda libre. Del razonamiento expuesto más arriba se sigue que tal ángulo no hubo de ser necesariamente pequeño. Si no se tiene en cuenta la resistencia del aire, se determina fácilmente que el alcance máximo, unos 40 metros, ocurre para un ángulo de 40 grados. La resistencia reduce el alcance en un 10 por ciento. Puesto que la mitad del transepto mide casi 33 metros, es claro que el accidente en cuestión sólo pudo ocurrir durante la etapa inferior de bombeo en los últimos ciclos.

El movimiento de un péndulo ideal se representa a menudo en un diagrama de plano de fases, que tiene al ángulo con la vertical y a la velocidad angular como coordenadas cartesianas. Las oscilaciones periódicas del péndulo están representadas por curvas cerradas que rodean el origen, una para cada posible valor de la energía constante, tanto más exterior aquélla cuanto mayor sea ésta. En cualquier instante, el estado de movimiento corresponde a un punto en la curva, recorrida repetidamente al pasar el tiempo. Un ciclo abarca el movimiento entre dos puntos de velocidad angular nula; la amplitud es el módulo del ángulo de un punto tal.

Cuando se tiene en cuenta la resistencia del aire, la energía decrece de modo continuo y la trayectoria del punto representativo es una espiral hacia el origen, posición de reposo del péndulo. La sucesión de amplitudes decrecientes en los tiempos discretos en los que la velocidad angular se anula, describe sinópticamente la evolución de las oscilaciones. En general, se puede determinar el valor de la amplitud al final de un ciclo en función del valor a su comienzo. Esta relación determina un mapa de retorno, o de Poincaré, en virtud del cual se

observa que la amplitud al término del ciclo n es igual a la función de la amplitud al término del ciclo $n-1$. El mapa se puede dibujar en un plano cuyos ejes coordenados corresponden a las amplitudes al final de dos ciclos consecutivos. Si se conoce el valor inicial, el mapa genera toda la sucesión iterativamente.

Si se bombea el péndulo para incrementar su energía, se necesita un espacio de fases de cuatro ejes para la representación del movimiento, ya que hay dos nuevas variables: radio pendular y velocidad radial. Sin embargo, en el caso del bombeo óptimo, esas variables vienen preestablecidas en función del ángulo y de la velocidad angular, de suerte que el espacio físico se reduce a un plano; hay de nuevo un simple mapa de amplitudes que ahora corresponden a velocidades angular y radial nulas, y radio mínimo.



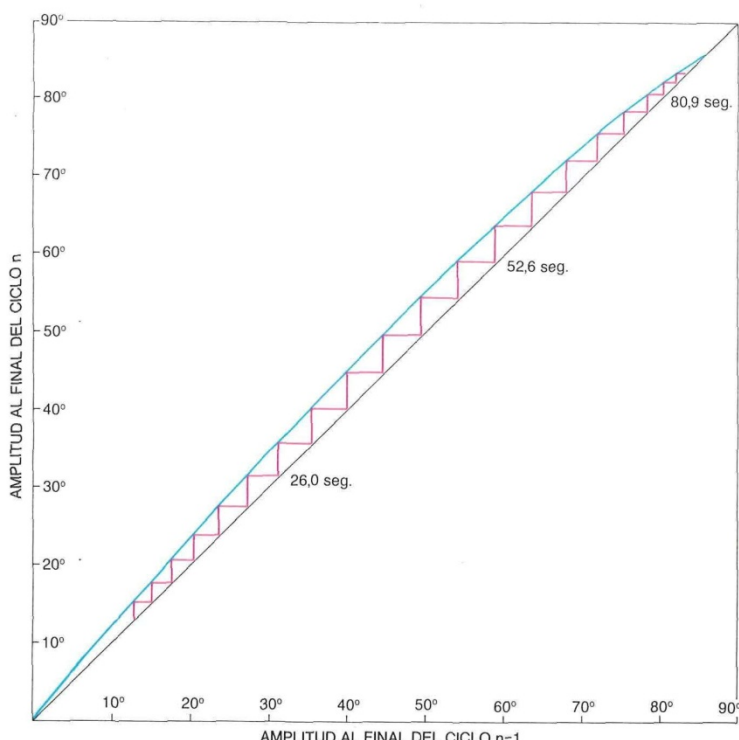
PLANO DE FASES de un péndulo simple. A cada par de valores de ángulo y velocidad angular corresponde un punto representativo. Al pasar el tiempo, el punto describe repetidamente una curva cerrada en torno al origen, tanto más lejana cuanto mayor es la energía (líneas negras); la amplitud está determinada por las intersecciones con el eje horizontal (círculos azules). Cuando se tiene en cuenta la resistencia del aire, el punto describe una espiral hacia el origen (línea roja), generando una sucesión de amplitudes decrecientes. Si se bombea el péndulo, la sucesión puede ser creciente.

Se han examinado y determinado ya, en el caso del botafumeiro, ganancia y pérdidas, necesarias para dibujar el mapa. En su determinación, sin embargo, se supuso que eran muy pequeñas, y se despreciaron, entre otros efectos, el peso de la cuerda; pero ello conduce a errores del 10 al 20 por ciento. Un análisis más refinado que tiene en cuenta esas correcciones genera un mapa cuyo desacuerdo con las observaciones es sólo del 2 al 4 por ciento.

La intersección de un mapa de retorno con la bisectriz de los ejes es un punto fijo de aquél. Un punto tal es localmente estable, si constituye el límite de todas las sucesiones de iteraciones con amplitud inicial en su vecindad, lo que requiere que la pendiente del mapa en el punto no exceda a la unidad. En el caso del botafumeiro, hay un punto fijo inestable a cero grados y otro estable a 85 grados; de hecho, todas las sucesiones de valor inicial no nulo convergen en 85 grados. Comenzando con una amplitud de 13 grados, los cálculos muestran que hacen falta 18 ciclos y unos 80 segundos para sobrepasar los 80 grados. Basta recordar los

datos de observación, para concluir que los resultados del análisis son satisfactorios. El botafumeiro aparece como un oscilador paramétrico, que sostiene oscilaciones permanentes a una sola amplitud, para la cual pérdidas y ganancias se compensan.

Se ha esclarecido modernamente que los mapas de muchos sistemas físicos sencillos no sólo carecen de puntos fijos estables, sino que presentan un comportamiento "caótico determinista", a tenor del cual no es posible, en principio, ante un problema dado, predecir la trayectoria física para tiempos indefinidamente largos. Naturalmente nunca hay precisión completa sobre el punto físico inicial. En un sistema caótico, trayectorias que parten de puntos próximos se separan con el paso del tiempo y dan lugar a resultados diferentes que impiden su predicción; y ello de un modo radical: un aumento progresivo de la precisión inicial conduce a un alargamiento relativo del tiempo de predicción progresivamente decreciente.



MAPA DE RETORNO del botafumeiro (*línea azul continua*). El mapa relaciona las amplitudes al término de dos ciclos consecutivos y, dado un valor inicial, determina toda la sucesión de amplitudes. La intersección con la bisectriz de los ejes (*línea negra discontinua*) es un punto fijo estable: la pendiente del mapa es menor que la unidad; todas las sucesiones posibles convergen en él. La sucesión dibujada (*línea roja*) corresponde a la amplitud inicial observada, en torno a los 13 grados; los tiempos al final de los ciclos 6, 12 y 18 están señalados en segundos. Los tiradores del incensario necesitan 17 ciclos y 80 segundos para alcanzar una amplitud, máxima, de unos 82 grados.

Se sabe, sin embargo, que sólo los sistemas con espacios de fases de tres o más ejes presentan comportamientos caóticos. En particular, el péndulo bombeado óptimamente no puede ser caótico (lo que no es extraño: ¡columnpios e incensario funcionan!). Obsérvese que la situación cambia cuando se trata de un bombeo que siga una ley temporal previamente dada, explícita. Como la frecuencia pendular varía con su amplitud, el radio y la velocidad radial no quedan predeterminados en función del ángulo y velocidad angular; hay más de dos ejes fásicos y no es posible, en principio, excluir la aparición de caos. Ocurre otro tanto si, en vez de bombear, se empuja el péndulo. Recientemente, se comprobó que el péndulo, bajo una u otra excitación de ley temporal dada, exhibe caos si la excitación no es excesivamente débil.

Se ha venido suponiendo que el plano de oscilación estaba fijado. Pero si ese plano puede rotar (péndulo "esférico"), el espacio fásico presenta más de dos ejes, incluso bajo excitación óptima; surge, de nuevo, la Posibilidad de movimiento caótico. El botafumeiro, sin embargo, se mantiene sensiblemente en el plano perpendicular al eje de los tambores. Cabe señalar, no obstante, que ayudan a ese propósito dos guías que cuelgan del armazón, por articulaciones, para reducir el rozamiento; y que en cierta ocasión, en este siglo, el incensario se desvió de aquel plano y golpeó una columna del transepto. Esto suscita dos cuestiones de interés. ¿Puede ser caótico, en el sentido moderno, el movimiento esférico del incensario bajo excitación óptima? ¿Se descubrió, siglos atrás, que ese caos desaparecía si se restringía el movimiento lateral? En otras palabras, ¿se introdujeron las guías en cierto momento del pasado tras observar la aparición de oscilaciones erráticas? No puede haber duda de que se hubiera considerado indeseable cualquier movimiento errático: sería difícil una acción eficaz de bombeo, el botafumeiro estaría propenso a accidentes y el movimiento mismo aparecería inapropiado para un servicio litúrgico.

En la actualidad sólo se dispone de una respuesta parcial a esas cuestiones. En 1984 se probó que un péndulo esférico empujado en una dirección dada y siguiendo una ley temporal prefijada podía manifestar un comportamiento caótico por muy pequeña que fuera la excitación. Y muy recientemente se llegó al mismo resultado para una excitación no prefijada, sino de ciclo óptimo. El caso del botafumeiro, al que se bombea y no empuja, puede exigir la consideración de los efectos que el diámetro no nulo de los tambores introduce en el problema.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

O BOTAFUMEIRO DA CATEDRAL COMPOSTELAN. J. Carro García, en Nos-boletín Mensual de Cultura Gallega, vol. 109, págs. 6-10; 1933.

O BOTAFUMEIRO: PARAMETRIC PUMPING IN THE MIDDLE AGES. J. R. Sanmartín, en American Journal of Physics, vol. 52, págs. 937-945, 1984.

RESONANT MOTION OF A SPHERICAL PENDULUM. J. Miles, en Physica D, vol. 11, págs. 309-323; 1984.

CHAOS IN A COHERENTLY DRIVEN SPHERICAL PENDULUM. J. R. Sanmartín y N. de Paola (en preparación).